## **基础课34 数列求和**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 分组求和与并项求和 | 理解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2021年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 裂项相消法求和 | 掌握 | 2023年全国甲卷（理）  2020年新课标Ⅰ卷（理） | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 错位相减法求和 | 掌握 | 2021年全国乙卷（文） | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，本基础课为高考的重点，其中等差、等比数列的通项与求和为命题热点，多以解答题的形式呈现，难度中等.预计2025年高考命题情况变化不大，但应加强对非等差、等比数列求和的训练，注重与其他知识的综合创新，同时也要注意对结构不良试题的训练 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

数列求和的几种常用方法

##### **一、公式法**

直接利用等差数列、等比数列的前项和公式求和.

1.等差数列的前项和公式：

.

2.等比数列的前项和公式：

##### **二、分组求和法与并项求和法**

1.若一个数列是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减.

2.形如的类型，常采用两项合并的方法求解.

##### **三、错位相减法**

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前项和即可用此法来求，如等比数列的前项和公式就是用此法推导的.

##### **四、裂项相消法**

裂项相消法求和的实质是先将数列中的通项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的，其解题的关键就是准确裂项和消项.

（1）裂项原则：一般是前面裂几项，后面就裂几项，直到发现被消去项的规律为止.

（2）消项规律：消项后前面剩几项，后面就剩几项，前面剩第几项，后面就剩倒数第几项.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 若数列为等比数列，且公比不等于1，则其前项和.( √ )

（2） 当时，.( √ )

（3） 求时，只要将等号两边同时乘,即可根据错位相减法求得.( × )

（4） 若数列，， ，是首项为1，公比为3的等比数列，则数列的通项公式是.( √ )

2. （易错题）已知数列的前项和，则数列的前项和为.

**【易错点】**忽视新数列的公比致错.

[解析]当时，,所以,是以为首项，4为公比的等比数列，所以,.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修②P40·T4改编）设数列的前项和.若,则数列的前项和( D ).

A. B.

C. D.

[解析]由知，数列是等差数列，所以,，解得,,所以,，所以,，所以,因此,.故选.

4. （人教A版选修②P40·T3改编）已知数列的通项公式为，其前项和为,则.

[解析]因为, ① 所以, ② 由得，整理得.

##### **题组3 走向高考**

5. （2023·新高考Ⅱ卷改编）已知记为其前项和，则.

[解析]由题可知，奇数项和偶数项均为项，所以，，所以.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 分组求和与并项求和［师生共研］**

典例1 （一题练透）已知等差数列，其前项和为，满足，且6是和的等比中项.

（1）求的通项公式；

（2）设,求数列的前项和；

（3）若，求数列的前2025项和.

[解析]（1）设等差数列的公差为，由题意可得，则，因为6是和的等比中项，所以，解得，则解得所以的通项公式为.

（2）由（1）可得，则，

所以.

（3）因为的最小正周期为3，，所以.



**分组求和与并项求和的类型**

1.分组转化法求和的常见类型：

（1）分段型，如，其中数列,是等比数列或等差数列；

（2）周期型，如,等.

2.并项求和法：一个数列的前项和中，可两两或几个结合求解，则称之为并项求和.形如，可两项合并求解.

##### **针对训练**

（一题练透）已知等差数列满足，，正项等比数列满足，是和的等比中项.

（1） 求和的通项公式；

[解析]设等差数列的公差为，等比数列的公比为，

由题意可得

解得，所以.

又且，，所以，所以.

（2） 若，求数列的前项和；

[解析]因为，

所以

.

（3） 若，求数列的前项和.

[解析].

当为偶数时，;

当为奇数时，.

综上所述,数列的前项和

#### **考点二 裂项相消法求和［师生共研］**

典例2 [2024·四川模拟]设数列的前项和为，.

（1）证明数列为等比数列，并求数列的通项公式;

（2）若数列的前项和，求的值.

[解析]（1）因为，所以当时，，解得,

当时，，则，

整理得，故，且，

所以数列是首项为2，公比为2的等比数列，所以，即.

（2）记，

则数列的前项和，

则，即，所以，解得，故的值为7.



**数列裂项的五种类型**

|  |  |
| --- | --- |
| 数列（为正整数） | 裂项方法 |
| （为非零常数） |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

##### **针对训练**

[2024·南宁模拟]已知数列的前项和为，且，.

（1） 求的通项公式；

[解析]由题意，当时，；

当时，，

当时，上式也符合.

故的通项公式为.

（2） 设，，求数列的前项和.

[解析]由（1）得，，所以，.

当为偶数时，；

当为奇数时，.

综上所述，.

#### **考点三 错位相减法求和［师生共研］**

典例3 [2024·湖南校考]已知数列的前项和为，且，，数列满足，，其中.

（1）求数列和的通项公式；

（2）若，求数列的前项和.

[解析]（1）当时，，所以，

当时，由，得，

所以，所以，

因为，所以对都有.

故数列是以1为首项，4为公比的等比数列，所以的通项公式为.

由，得，

当时，，，， ，，,

则当时，.

验证也符合上式，故.

（2）由，结合（1）可得,

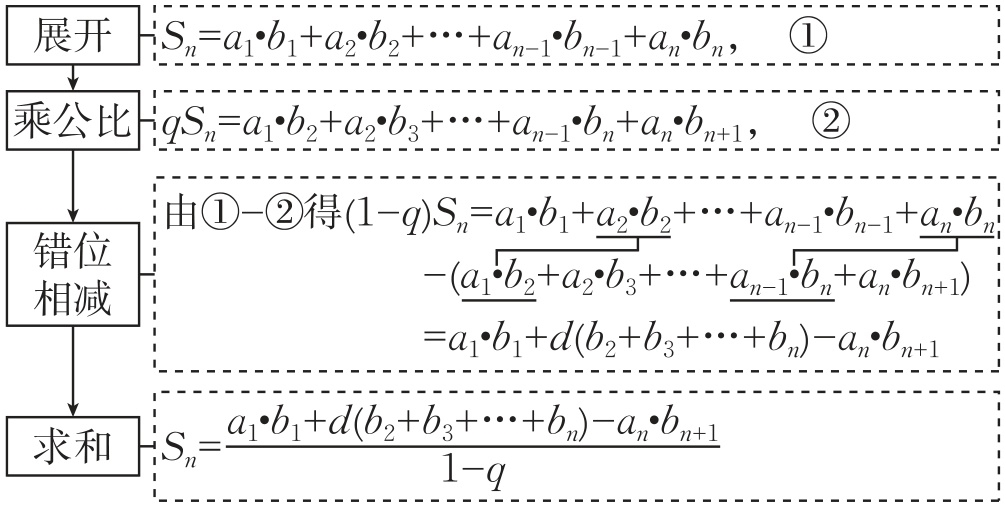
所以，

，

两式相减得，所以.



**错位相减法求和的基本步骤**



其中，是公差为的等差数列，是公比为的等比数列.

##### **针对训练**

[2024·辽宁校考]已知数列的前项和为，且.

（1） 求的通项公式；

[解析]当时，，解得;

当时，，相减得，即.故数列是以为首项，为公比的等比数列，故.

（2） 若，设数列的前项和为，求证：.

[解析]因为，所以， ①

则， ②

由得，所以，则.

因为函数在上单调递增，

所以.